ELEMENTS d'INERTIE d'un SOLIDE

On montre en dynamique que le comportement d'un solide fait intervenir 3 grandeurs de géométrie des masses.

- Une grandeur scalaire : la **masse**. (un nombre)
- Une grandeur vectorielle : la **position du CG** (trois nombres).
- Une grandeur tensorielle : la **matrice d'inertie** en un point (six nombres).

Centre d'inertie – Centre de masse – Centre de gravité :

Le centre d'inertie (noté G) d'un solide ou d'un ensemble de solides E est le **barycentre des masses.**

$$\int_E \overrightarrow{GP}.dm = \vec{0}$$

Pour connaître la coordonnée de G : $\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M}.\int_E \overrightarrow{OP}.dm}$

Ou, en projection :

$$x_g = \frac{1}{m}\int_E x.dm \qquad y_g = \frac{1}{m}\int_E y.dm \qquad z_g = \frac{1}{m}\int_E z.dm$$

μ étant la masse spécifique du système E au point P, $dm = \mu.dV$

***Détermination de la position du centre d'inertie**

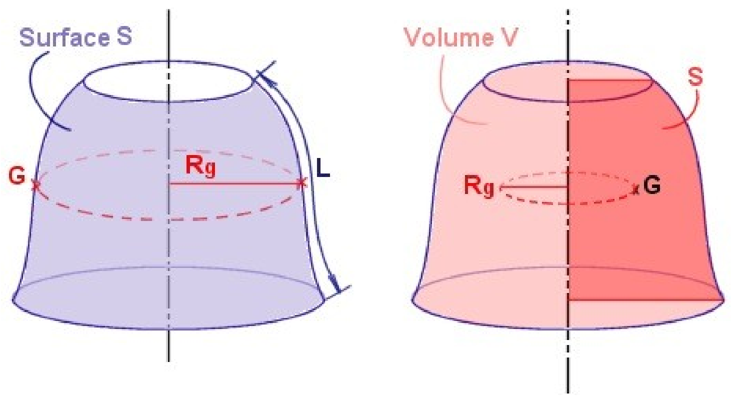
- Choix pertinent des axes (si le solide admet un axe, ou un plan de symétrie alors G appartient à cet axe ou à ce plan.
- Choix du paramétrage (cartésien, polaire, cylindrique, sphérique)
- Domaines d'intégration. Bien choisir les bornes.
- Pour un ensemble de solides dont on connaît les masses et les CG :

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{M_1}{M}.\overrightarrow{OG_1} + \frac{M_2}{M}.\overrightarrow{OG_2} + ...}$$

***Théorème de Guldin**

La surface de révolution engendrée par une ligne plane de longueur **L** tournant autour d'un axe (Δ) situé dans son plan sans le traverser est égale au produit de la longueur de la circonférence décrite par le CG de la ligne par la longueur de la ligne elle même.

S = 2.Π.Rg.L **V = 2.Π.Rg.S**



Eléments d'inertie d'un solide

***Définition dans le cas d'une masse ponctuelle (p):**

Moment d'inertie de p/Axe :

$$\boxed{I(p) = m.d^2}$$

Produit d'inertie de p/(2 plans Π1, Π2) :

Avec d1 = distance de P à Π1 et d2 = distance de P à Π2.

***Définition dans le cas d'un solide (S):**

Moment d'inertie de S/ Axe :

$$\boxed{I(S/\Delta) = \int_{P\in S} d^2.dm}$$

Produit d'inertie de S/(2 plans Π1, Π2) :

$$\boxed{J(S/\Pi_1,\Pi_2) = \int_{P\in S} d_1.d_2.dm}$$

***Matrice d'inertie d'un solide en O**

$$\overline{\overline{I(O;S)}} = \begin{vmatrix} Iox & -J(yOz,xOz) & -J(yOz,xOy) \\ -J(yOz,xOz) & Ioy & -J(xOz,xOy) \\ -J(yOz,xOy) & -J(xOz,xOy) & Ioz \end{vmatrix}_{(O,x,y,z)}$$

Attention : La matrice d'inertie est toujours calculée dans une base liée au solide !

Notation simplifiée de la matrice d'inertie en O d'un solide S

$$\boxed{\overline{\overline{I(O;S)}} = \begin{vmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{vmatrix}_{(O,x,y,z)}}$$

Notation développée de la matrice d'inertie

$$\boxed{\overline{\overline{I(O;S)}} = \begin{vmatrix} \int_S (y^2+z^2).dm & -\int_S xy.dm & -\int_S xz.dm \\ -\int_S xy.dm & \int_S (x^2+z^2).dm & -\int_S yz.dm \\ -\int_S xz.dm & -\int_S yz.dm & \int_S (x^2+y^2).dm \end{vmatrix}_{(O,x,y,z)}}$$

SIMPLIFICATIONS

si le solide admet des plans de symétrie :

si xOy plan de symétrie, alors z varie de $\pm z_0$ donc :

$$E = \int_S xz.dm = 0 \qquad D = \int_S yz.dm = 0$$

si yOz plan de symétrie, alors x varie de $\pm x_0$ donc :

$$E = \int_S xz.dm = 0 \qquad F = \int_S xy.dm = 0$$

si xOz plan de symétrie, alors y varie de $\pm y_0$ donc :

$$F = \int_S xy.dm = 0 \qquad D = \int_S yz.dm = 0$$

D'autre part si le solide admet xoy comme plan de symétrie alors l'axe Oz est un axe principal d'inertie. Si Ox joue le même rôle que Oy alors A=B

***Théorème de Huygens**

$$\overrightarrow{GO}\begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix}_{(G,xyz)} \qquad \overrightarrow{GP}\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}_{(G,xyz)} \qquad \overrightarrow{OP}\begin{vmatrix} X = x-a \\ Y = y-b \\ Z = z-c \end{vmatrix}_{(O,XYZ)}$$

Relation entre les moments d'inertie d'un solide / 2 axes parallèles

L'un des axes passe par G.

$$\boxed{\begin{aligned} I(S/Ox) &= I(S/Gx) + m.(b^2+c^2) \\ &= I(S/Gx) + m.d^2 \end{aligned}}$$

Les 2 axes sont quelconques

$$I(S/\Delta') = I(S/\Delta) + m.(d'^2 - d^2)$$

Théorème de Huygens généralisé à la matrice d'inertie

$$\overline{\overline{I(O;S)}}_{(O,XYZ)} = \overline{\overline{I(G;S)}}_{(G,xyz)} + \begin{vmatrix} m.(b^2+c^2) & -m.a.b & -m.a.c \\ -m.a.b & m.(a^2+c^2) & -m.b.c \\ -m.a.c & -m.b.c & m.(a^2+b^2) \end{vmatrix}_{(G,xyz)}$$

$$avec \quad \overrightarrow{GO}\begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix}_{(G,xyz)}$$

CINETIQUE

Torseur cinétique d'un solide S/R_0 : Torseur des quantités de mouvement.

On considère un solide en mouvement/R_0. Le torseur cinétique de S/R_0 est le torseur des quantités de mouvements.

$$\begin{Bmatrix} \vec{T}(S/R_0) \\ cinetique \end{Bmatrix}_O = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{Rc}(S/R_0) = m.\overrightarrow{V}(G;S/R_0) \\ \overrightarrow{\sigma}(O;S/R_0) = \overline{\overline{I}}(O;S)\times\overrightarrow{\Omega}(S/R_0) + m.\overrightarrow{OG}\wedge\overrightarrow{V}(O;S/R_0) \end{Bmatrix}_O$$

***Résultante cinétique d'un solide S en mouvement /R0.**

La résultante cinétique d'un ensemble matériel E en mouvement par rapport à un repère est égale à la quantité de mouvement du centre de gravité de l'ensemble matériel affecté de la masse totale de l'ensemble.

$$\boxed{\overrightarrow{Rc}(S/R_0) = m.\overrightarrow{V}(G;S/R_0)}$$

***Moment cinétique d'un solide S en un point O de ce solide.**

$$\boxed{\overrightarrow{\sigma}(O;S/R_0) = \overline{\overline{I}}(O;S)\times\overrightarrow{\Omega}(S/R_0) + m.\overrightarrow{OG}\wedge\overrightarrow{V}(O;S/R_0)}$$

Avec : $\overline{\overline{I}}(O;S)$ et $\overrightarrow{\Omega}(S/R_0)$ **calculées dans la base du solide.**

Cas particuliers

***Si Os=G :**

$$\overrightarrow{\sigma}(G;S/R_0) = \overline{\overline{I}}(G;S)\times\overrightarrow{\Omega}(S/R_0)$$

***Si Os fixe dans R0 :**

$$\overrightarrow{\sigma}(O;S/R_0) = \overline{\overline{I}}(O_s;S)\times\overrightarrow{\Omega}(S/R_0)$$

Pour calculer un moment cinétique : 2 questions :

- **le solide est il un solide ou un ensemble de solides ?**
- **Est ce qu'on travaille en un point appartenant à ce solide ? Si non : changement de point :**

***Relation entre les Moments cinétiques entre deux points.**

$$\boxed{\overrightarrow{\sigma}(B;S/R_0) = \overrightarrow{\sigma}(A;S/R_0) + \overrightarrow{BA}\wedge m.\overrightarrow{V}(G;E/R_0)}$$

Quand on veut $\overrightarrow{\sigma}(A;S/R_0)$, écrire :

$$\overrightarrow{\sigma}(A;S/R_0) = \overrightarrow{\sigma}(G;S/R_0) + \overrightarrow{AG}\wedge m.\overrightarrow{V}(G;E/R_0)$$

et

$$\overrightarrow{\sigma}(G;S/R_0) = \overline{\overline{I}}(G;S)\times\overrightarrow{\Omega}(S/R_0)$$

Avec : avec : $\overline{\overline{I}}(G;S)$ et $\overrightarrow{\Omega}(S/R0)$ **exprimées dans la base du solide.**

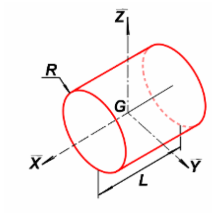
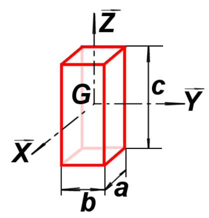
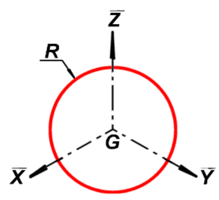
***Conséquences pour un ensemble de solides :**

Soit E un ensemble matériel constitué de n solides : S_i

$$\overrightarrow{\sigma}(A;E/R_0) = \sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{\sigma}(A;S_i/R_0)$$

$$\overrightarrow{\delta}(A;E/R_0) = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma}(A;E/R_0)\right]_{R0} + \overrightarrow{V}(A/R_0)\wedge m.\overrightarrow{V}(G;E/R_0)$$

$$m.\overrightarrow{V}(G;E/R_0) = \sum_{i=1}^{n} m_i.\overrightarrow{V}(G_i;E_i/R_0)$$

	$\overline{\overline{I}}(G,cylindre) = \begin{vmatrix} \frac{m.R^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m.R^2}{4}+\frac{m.L^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m.R^2}{4}+\frac{m.L^2}{12} \end{vmatrix}_{(G,x,y,z)}$
	$\overline{\overline{I}}(G,prisme) = \begin{vmatrix} \frac{m.(b^2+c^2)}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m.(a^2+c^2)}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m.(a^2+b^2)}{12} \end{vmatrix}_{(G,x,y,z)}$
	$\overline{\overline{I}}(G,sphère) = \begin{vmatrix} \frac{2}{5}M.R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}M.R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}M.R^2 \end{vmatrix}_{(G,x,y,z)}$

Energie cinétique d'un Solide S en mouvement quelconque.

$$\boxed{Ec(S/R_0) = \frac{1}{2}\cdot\begin{Bmatrix} Torseur \\ cinétique \end{Bmatrix}_G \otimes \begin{Bmatrix} Torseur \\ cinématique \end{Bmatrix}_G}$$

Les torseurs cinétiques et cinématiques seront calculés au même point, de préférence G.

$$\boxed{Ec(S/R_0) = \frac{1}{2}\cdot\begin{Bmatrix} m.\overrightarrow{V}(G,S/R_0) \\ \overrightarrow{\sigma}(G,S/R_0) \end{Bmatrix}_G \otimes \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega}_{S/RO} \\ \overrightarrow{V}(G,S/R_O) \end{Bmatrix}_G}$$

$$\boxed{Ec(S/R_0) = \frac{1}{2}\cdot m.V(G,S/R_O)^2 + \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{\sigma}(G,S/R_0)\bullet\overrightarrow{\Omega}_{S/R_O}}$$

Energie cinétique d'un ensemble constitué de plusieurs solides

$$\boxed{Ec(E/R_0) = \sum_{i=1}^{n} Ec(S_i/R_0)}$$

DYNAMIQUE

La dynamique permet d'étudier les mouvements des solides en relation avec les causes de ces mouvements.
Un problème de dynamique consiste, quand on connaît les actions mécaniques, à déterminer les équations de mouvement et inversement quand on connaît les équations de mouvement à déterminer les actions mécaniques induites.

Torseur dynamique :

Le torseur dynamique d'un solide S en mouvement par rapport à un repère R_0 est le torseur associé au champ des accélérations des points de E et à la masse.

$$\left\{\vec{A}_{(S/R_0)}\right\} = \left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{Rd}(S/R_0) = m.\overrightarrow{\Gamma}(G;S/R_0) \\ \overrightarrow{\delta}(A;S/R_0) = \left[\dfrac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma}(A;S/R_0)\right]_{R_0} + \overrightarrow{V}(A/R_0)\wedge m.\overrightarrow{V}(G;S/R_0)\end{array}\right\}_A$$

Avec :

- $\overrightarrow{Rd}(S/R_0)$ **Résultante dynamique de S/Ro:**

On dérive par rapport au temps l'expression de la résultante cinétique :

$$\overrightarrow{Rd}(S/R_0) = \frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{Rc}(S/R_0)\right] = \frac{d}{dt}\left[m.\vec{V}(G;S/R_0)\right]$$

$$\boxed{\overrightarrow{Rd}(S/R_0) = m.\vec{\Gamma}(G;S/R_0)}$$

- $\overrightarrow{\delta}(A;S/R_0)$ **Moment dynamique en A de S/Ro :**

$$\boxed{\overrightarrow{\delta}(A;S/R_0) = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma}(A;S/R_0)\right]_{R_0} + \overrightarrow{V}(A/R_0)\wedge m.\overrightarrow{V}(G;S/R_0)}$$

Cas particuliers

***Si A = G**

$$\overrightarrow{\delta}(G;S/R_0) = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma}(G;S/R_0)\right]_{R0}$$

***Si A fixe dans R0**

$$\overrightarrow{\delta}(A;S/R_0) = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma}(A;S/R_0)\right]_{R0}$$

***Relation entre les moments dynamiques en deux points A et B pour E en mouvement /R_0**

$$\boxed{\overrightarrow{\delta}(B;S/R_0) = \overrightarrow{\delta}(A;S/R_0) + \overrightarrow{BA}\wedge m.\overrightarrow{\Gamma}(G;S/R_0)}$$

ⓘAttention : Si $\vec{\sigma}_A$ n'est pas exprimé dans R0 mais dans une base A. Alors :

$$\overrightarrow{\delta}(A;S/R_0) = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma}(A;S/R_0)\right]_{R0} + \vec{\Omega}(A/R0)\wedge\overrightarrow{\sigma}(A;S/R_0)$$

Principe fondamental de la dynamique du solide.

***Définition :**
Dans un repère Galiléen, le torseur des actions mécaniques appliquées à un solide est égale au torseur dynamique de ce solide dans son mouvement par rapport à R0.

$$\boxed{\left\{\begin{array}{c}\vec{R}_{fext/S} \\ \overrightarrow{m_A(F_{ext/S})}\end{array}\right\}_A = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{Rd}(S/R0) \\ \vec{\delta}_A(S/R0)\end{array}\right\}_A}$$

***Repères Galiléen approchés :**
-Repère de Copernic: Origine au centre d'inertie du système solaire + trois directions stellaire "fixes".
Tout repère en translation par rapport au repère de Copernic peut être considéré comme Galiléen.
-Repère lié au centre d'inertie de la terre : Origine au centre d'inertie de la terre + les directions stellaires précédentes (repère en translation non rectiligne et non uniforme par rapport au précédent)
-Le repère terrestre : Origine locale du repère de travail. utilisation: convient en général au phénomènes mécaniques classiques. Il peut être considéré comme galiléen sur une période d'observation relativement courte.

Théorèmes Généraux.

***Théorème de la résultante dynamique :**

La somme des forces extérieures qui s'appliquent sur un solide S est égale au produit de la masse de ce solide par l'accélération galiléenne de son centre d'inertie.

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{F_{ext/S}} = m.\overrightarrow{\Gamma(G;S/R_0)}}$$

***Théorème du Moment dynamique.**

La somme des moments au point A des forces extérieures appliqués au solide S est égale au moment dynamique en A du solide dans son mouvement par rapport à R0

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{m_A(F_{ext/S})} = \overrightarrow{\delta(A;S/R_0)}}$$

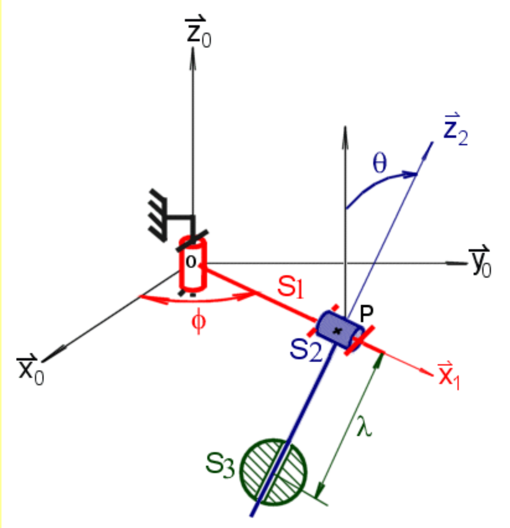
Méthode de résolution d'un problème de dynamique :

- **Hypothèses et modélisation**.
  Solides Parfaits (homogènes, géométrie parfaite; indéformables)
  Liaisons parfaites (sans frottement, sans jeux)
- **Référentiel**. Galiléen.
- **Paramétrage** / Choix des paramètres de position (localiser le CdG et l'orientation du solide à l'aide d'un repère R1 lié au solide et d'un repère R0 lié au référentiel Galiléen).
- **Choix du solide à isoler** et des équations à écrire.

Pour le choix des équations (procéder comme suit) :

λ : paramètre de **translation** qui positionne S3 le long de z_{23} :
→Th. De la **résultante dynamique** appliquée à **S3** en proj. Sur z_{23}.

θ : Paramètre de **rotation** qui positionne **S2 + S3** autour de x_{12} :
→Th. Du **moment dynamique** appliqué à **S2 + S3** en P, en proj. Sur x_{12}.



ϕ : Paramètre de **rotation** qui positionne **S1 + S2 + S3** autour de Z_0 :
→Th. Du **moment dynamique** appliqué à **S1 + S2 + S3** en O, en proj. Sur Z_0.

Attention, les accélérations sont calculées par rapport à R0.

- **Bilan des actions mécaniques** : $\left\{\begin{array}{c}\vec{R}_{fext/S} \\ \overrightarrow{m_A(F_{ext/S})}\end{array}\right\}_A$
- **Principe Fondamental de la dynamique**

$$\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{F_{ext/S}} = m.\vec{\Gamma}(G;S/R0) \qquad \sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{m_A(F_{ext/S})} = \vec{\delta}_A(S/R0)$$